# ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

11. јун 2014

Професор: Игор Долинка　　　　Асистент: Бојан Башић

1. Израчунати вредност Лежандровог симбола $\left(\dfrac{98!}{101}\right)$.

2. Доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ постоји бесконачно много тројки природних бројева $x$, $y$ и $z$ таквих да важи
$$x^n + y^n = z^{n+1}.$$
Једна идеја: Утврдити да се за $y$ облика $a(a^n+1)$ и $z$ облика $a^n+1$ увек може наћи погодно $x$ такво да посматрана једнакост буде испуњена.

3. a) Назовимо *колоквијумским* бројеве облика $q^{2^l}$, где је $q$ прост број облика $4k+1$ а $l$ ненегативан цео број. Нека је $n$ најмањи природан број који се може представити као збир квадрата два цела броја, узимајући у обзир и поредак, на тачно $2^s$ начина, за природан број $s \geqslant 2$. Доказати да је $n$ управо производ најмањих $s-2$ колоквијумских бројева.

   b) Наћи најмањи природан број који се може представити као збир квадрата два цела броја, узимајући у обзир и поредак, на тачно 262 144 начина.

   Једна идеја: За део под a) утврдити да, уколико број $n$ испуњава постављене услове, тада је $n$ облика $q_1^{2^{b_1}-1} q_2^{2^{b_2}-1} \cdots q_t^{2^{b_t}-1}$, где су $q_1, q_2, \ldots, q_t$ прости бројеви облика $4k+1$ и $b_1 + b_2 + \cdots + b_t = s-2$. Потом запазити једнакост $q^{2^b-1} = q \cdot q^2 \cdot q^4 \cdots q^{2^{b-1}}$ (за произвољан број $b$), и одатле закључити да је $n$ производ неких $s-2$ колоквијумских бројева.